

Derivada con respecto al dominio y algunas aplicaciones en optimización de formas

Rajesh Mahadevan
Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

**Escuela de Postgrado en Matemática UdeC
4 - 7 Agosto 2026.**

- Derivada con respecto al dominio
- Resolución del Problema Isoperimétrico - En dimensión 3

Derivada con respecto al dominio

Ahora, cuando la función objetivo $J : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sobre una clase de dominios, el estudio de problemas de optimización de J sobre $\mathcal{D}$ requiere el estudio de variaciones de $J(\Omega)$ cuando un $\Omega \in \mathcal{D}$ está sujeto a pequeñas variaciones deformando la frontera.

- $V : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial suave, $\text{supp}(V) \subset D$, y Φ_t el flujo asociado. Denotamos $\Omega_t := \Phi_t(\Omega)$.

$$dJ(\Omega; V) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t},$$

siempre que este límite exista.

- Esto se denomina *derivada con respecto al dominio* (o *derivada de forma*) si es un funcional lineal y continuo con respecto a V .

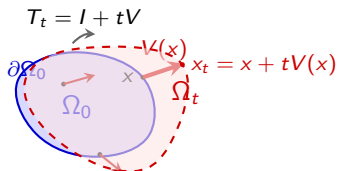


Figura: Deformación de un dominio inicial Ω_0 a un dominio perturbado Ω_t mediante la perturbación de la identidad impulsada por el campo de velocidades V .

Las preguntas de interés

- ¿Existe esta derivada?
- ¿Que forma tiene?
- ¿Como se calcula?

Cálculo de Derivada con Respecto al Dominio

Consideramos un funcional integral definido sobre un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) \, dx$$

f derivable y Ω de frontera suave.

Teorema de Transporte de Reynolds / Fórmula de Hadamard

$$dJ(\Omega)(V) = \int_{\partial\Omega} f(x) (V \cdot n) \, dS$$

Demostración Aplicando un cambio de variable ($y = T_t(x) = x + tV(x)$):

$$J(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(y) \, dy = \int_{\Omega} f(x + tV(x)) |\det DT_t(x)| \, dx$$

Para t pequeño, $|\det(I + tDV(x))| = 1 + t \operatorname{div}(V(x)) + \mathcal{O}(t^2)$. Derivando

$$dJ(\Omega)(V) = \int_{\Omega} \left(\nabla f(x) \cdot V(x) + f(x) \operatorname{div}(V(x)) \right) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(f(x) V(x)) \, dx$$

porque $\operatorname{div}(fV) = \nabla f \cdot V + f \operatorname{div} V$. Aplicando el Teorema de la Divergencia (Gauss-Ostrogradsky)

$$dJ(\Omega)(V) = \int_{\partial\Omega} f(x) (V(x) \cdot n) \, dS.$$

Derivada de Forma de una Integral de Frontera

Consideramos un funcional integral definido sobre la frontera $\partial\Omega$:

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} g(x) dS$$

con g suficientemente suave y Ω de frontera regular.

Fórmula de Derivada de Forma (Hadamard)

$$dJ(\Omega)(V) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial n} + Hg \right) (V \cdot n) dS$$

donde $H = \operatorname{div}(n)$ es la curvatura media y n la normal exterior.

Esquema de Demostración Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie suave orientada. Consideramos una parametrización local mediante una función suave $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- **Matriz Jacobiana:** $Df = (\partial_1 f \mid \partial_2 f) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$
- **Tensor Métrico (Primera Forma Fundamental):**

$$G = (Df)^T Df \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

- **Elemento de área superficial infinitesimal:**

$$dS = \sqrt{\det(G)} du_1 du_2$$

2. Perturbación de la Superficie y la Métrica

La superficie perturbada es $f_t = f + tV(f)$. Aplicando la regla de la cadena, la matriz Jacobiana de la superficie deformada es:

$$Df_t = (I + t DV)Df$$

Tensor Métrico Perturbado $G(t) = (Df_t)^T Df_t$

Desarrollando el producto y descartando términos $\mathcal{O}(t^2)$:

$$G(t) \approx G + t(Df)^T (DV + DV^T) Df$$

Derivando el elemento de área $dS_t = \sqrt{\det G(t)} du_1 du_2$ con la regla de la cadena y la identidad de Jacobi ($\frac{d}{dt} \det G = \det G \operatorname{tr}(G^{-1} \dot{G})$):

$$\left. \frac{d}{dt} \sqrt{\det G(t)} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \sqrt{\det G} \operatorname{tr}(G^{-1} \dot{G})$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}(G^{-1}\dot{G}) &= \text{tr}\left(\left((Df)^T Df\right)^{-1} (Df)^T (DV + DV^T) Df\right) \\
&= \text{tr}\left(\underbrace{Df \left((Df)^T Df\right)^{-1} (Df)^T}_{P \text{ (Proyector Tangente)}} (DV + DV^T)\right) \\
&= 2 \text{tr}(P DV)
\end{aligned}$$

reordenando los términos algebraicos ($\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$).

Ahora P es el proyector ortogonal al plano tangente $P = I - nn^T$.

$$\text{tr}\left((I - nn^T)DV\right) = \text{tr}(DV) - \text{tr}(n^T DVn)$$

- **Divergencia volumétrica:** $\text{tr}(DV) = \text{div}(V)$
- **Derivada normal:** $\text{tr}(n^T DVn) = \frac{\partial(V \cdot n)}{\partial n}$

Entonces:

$$\left. \frac{d}{dt} dS_t \right|_{t=0} = \left(\text{div}(V) - \frac{\partial(V \cdot n)}{\partial n} \right) dS \quad .$$

Derivada de Forma del Funcional Integral

Para calcular la derivada de forma del funcional $J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} g \, dS$, evaluamos en la región perturbada $\Omega_t = T_t(\Omega)$:

$$J(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} g(x) \, dS_t = \int_{\partial\Omega} g(x + tV(x)) \, dS_t$$

Expansión a Primer Orden en t

Utilizamos la derivada direccional de g en la dirección del flujo ($\nabla g \cdot V$) y la variación del elemento de área:

$$g(x + tV(x)) \approx g(x) + t \nabla g \cdot V$$

$$dS_t \approx \left(1 + t \left[\operatorname{div}(V) - \frac{\partial(V \cdot \mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} \right] \right) dS$$

Multiplicando ambas expresiones y reteniendo solo los términos de orden $\mathcal{O}(t)$:

$$dJ(\Omega)(V) = \int_{\partial\Omega} \left(\nabla g \cdot V + g \operatorname{div}(V) - g \frac{\partial(V \cdot \mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS$$

Descomposición de la Velocidad y Divergencia Superficial

Descomponemos el campo de velocidad V ortogonalmente en su parte normal y tangencial:

$$V = V_n n + V_\tau, \quad \text{donde } V_n = V \cdot n$$

1. Descomposición de la Derivada Espacial

$$\nabla g \cdot V = \nabla g \cdot (V_n n + V_\tau) = \frac{\partial g}{\partial n} V_n + \nabla_\tau g \cdot V_\tau$$

2. Expansión de la Divergencia Superficial

Aplicando la regla de Leibniz para $V_n n$:

$$\operatorname{div}_\Gamma(V) = \operatorname{div}_\Gamma(V_n n) + \operatorname{div}_\Gamma(V_\tau) = V_n \underbrace{\operatorname{div}_\Gamma(n)}_{H \text{ (curvatura media)}} + \operatorname{div}_\Gamma(V_\tau)$$

Sustituyendo las expansiones anteriores en la integral y separando las contribuciones normales y tangenciales:

$$dJ(\Omega)(V) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial n} + H g \right) V_n dS + \int_{\partial\Omega} \underbrace{(\nabla_\tau g \cdot V_\tau + g \operatorname{div}_\Gamma(V_\tau))}_{\operatorname{div}_\Gamma(g V_\tau)} dS$$

Anulación del Término Tangencial

Por el **Teorema de la Divergencia en Superficies** (integración por partes sobre una frontera cerrada $\partial\Omega$ sin borde), la integral de la divergencia superficial se anula:

$$\int_{\partial\Omega} \operatorname{div}_\Gamma(g V_\tau) dS = 0$$

Teorema de Estructura de Hadamard:

$$dJ(\Omega)(V) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial n} + H g \right) (V \cdot n) dS \quad .$$

Derivada de Forma del Problema Isoperimétrico en $\mathbb{R}^n$

Consideremos un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera suave $\partial\Omega$ de dimensión $n - 1$. El problema isoperimétrico consiste en minimizar el área superficial manteniendo un volumen constante:

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \, dS \quad \text{sujeto a} \quad V(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx = V_0$$

- **Derivada del Volumen:** Aplicando el teorema de la divergencia en $\mathbb{R}^n$:

$$dV(\Omega)(V) = \int_{\partial\Omega} (V \cdot \mathbf{n}) \, dS$$

- **Derivada del Perímetro (Hadamard con $g = 1$):**

$$dP(\Omega)(V) = \int_{\partial\Omega} H(V \cdot \mathbf{n}) \, dS$$

donde $H = \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{n})$ es la curvatura media (suma de las $n - 1$ curvaturas principales).

Condición de Optimalidad (Superficie CMC)

Usando un multiplicador de Lagrange λ para la restricción de volumen:

$$dP(\Omega)(V) - \lambda dV(\Omega)(V) = 0 \implies H = \lambda \quad (\text{Constante})$$

Conclusión: El Problema Isoperimétrico y la Esfera

Del análisis de la derivada de forma, las soluciones óptimas al problema isoperimétrico (superficies que minimizan el área manteniendo un volumen fijo) se caracterizan por tener una **curvatura media constante** ($H \equiv H_0$).

Teorema (Alexandrov's Soap Bubble Theorem)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio acotado cuya frontera $\Sigma = \partial\Omega$ es una superficie cerrada, suave, conexa e encajada con curvatura media constante $H \equiv H_0$. Entonces Σ es una esfera euclídea.

Conclusión: Gracias a este resultado clásico, se concluye formalmente que la única forma geométrica óptima y regular para el problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^3$ es la esfera.

Para resolver numéricamente problemas de optimización de forma o evolución geométrica (como el flujo de curvatura media), evolucionamos la parametrización de la superficie $f(u_1, u_2, t)$ mediante su campo de velocidad óptimo.

Ecuación Diferencial Ordinaria / Parcial (EDP)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = V_n \mathbf{n} = -(H - \lambda) \mathbf{n}$$

-  J. Sokolowski and J.-P. Zolesio (1992).
Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis.
Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag.
-  M. C. Delfour and J.-P. Zolésio (2011).
Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization.
Advances in Design and Control, SIAM.
-  S. Osher and J. A. Sethian (1988).
Front propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations.
Journal of Computational Physics, 78(1):12–49.
-  I. Chavel (2001).
Isoperimetric Inequalities: Differential Geometric and Analytic Perspectives.
Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press.
-  R. Schneider (2014).
Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory.
Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press.