

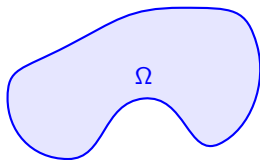
Derivada con respecto al dominio y algunas aplicaciones en optimización de formas

Rajesh Mahadevan
Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

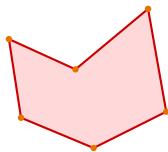
Escuela de Postgrado en Matemática UdeC
4 - 7 Agosto 2026.

- Algunos problemas de interés
- Marco teórico
- Nociones de Optimización
- Resolución del Problema Isoperimétrico

- **Problema Isoperimétrico** De todos los dominios acotados en el plano cuya frontera es una curva simple cerrada (o de Jordan) de perímetro fijo $L > 0$, ¿cuál es el que posee la mayor área?



- **Problema Isoperimétrico para polígonos** Dado un entero $n \geq 3$ y un perímetro fijo $L > 0$, de todos los polígonos simples en el plano con n lados y perímetro L , ¿cuál es el que encierra la mayor área?



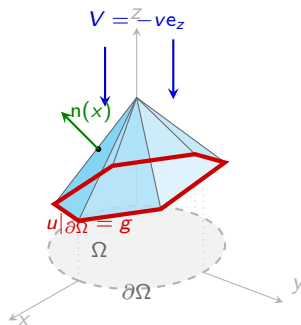
Problema de Aerodinámica

Considere una superficie $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ moviendo con velocidad constante en la dirección z (considerada horizontal) dentro de un fluido enrarecido de partículas enrarecidas. La resistencia al movimiento de la superficie se calcula por la formula

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} dx dy$$

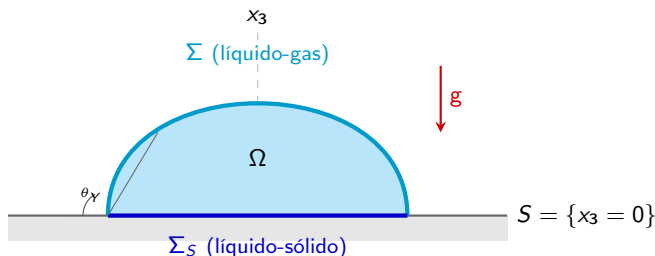
El problema es de encontrar la forma de la superficie para cual la resistencia es la mínima

$$\inf \{ F(u) : 0 \leq u \leq M, u \text{ concava sobre } \Omega \}.$$



Forma de una gota de líquido en reposo

Considere una gota líquida en reposo sobre un sustrato plano horizontal en presencia de la gravedad. ¿Cuál es la forma que toma la gota de líquido?



La funcional de energía potencial total $E(\Omega)$ combina la tensión superficial a lo largo de ambas fronteras y la energía potencial gravitatoria:

$$E(\Omega) = \gamma \text{Area}(\Sigma) + \beta \text{Area}(\Sigma_S) + \rho g \int_{\Omega} x_3 \, dx$$

donde $\gamma > 0$ es la tensión superficial líquido-gas, $\beta \in \mathbb{R}$ es la energía relativa de adhesión sólido-líquido, $\rho > 0$ es la densidad del fluido y g es la aceleración de la gravedad. Buscamos las formas críticas de $E(\Omega)$ de volumen fijo $V(\Omega) = V_0$.

Maximización de la rigidez torsional

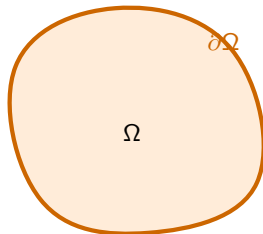
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la sección transversal de una viga cilíndrica. La rigidez a la torsión $P(\Omega)$ mide la resistencia de la viga a ser retorcida y se define mediante:

$$P(\Omega) = 2 \int_{\Omega} u(x) \, dx \quad (1)$$

donde la función de tensión $u \in H_0^1(\Omega)$ satisface la ecuación de estado de Poisson con condiciones de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = -2 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Entre todos los dominios de sección transversal suaves $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de área fija $A(\Omega) = A_0$, ¿cuál es forma que maximiza la rigidez a la torsión $P(\Omega)$?



Maximización de la Capacidad Electroestática

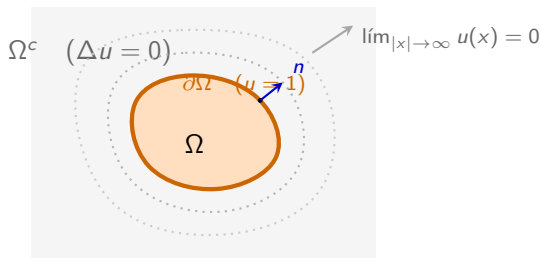
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio acotado y suave que representa un conductor eléctrico sólido, y sea Ω^c la región exterior no acotada. El potencial electrostático de equilibrio $u(x)$ generado al cargar Ω a un voltaje unitario satisface:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega^c \\ u = 1 & \text{en } \partial\Omega \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

La capacidad electrostática $\text{Cap}(\Omega)$ se define como:

$$\text{Cap}(\Omega) := \int_{\Omega^c} |\nabla u|^2 dx$$

¿Cuál es el dominio que minimiza $\text{Cap}(\Omega)$ sujeto a $\text{Vol}(V) = c$?



Todos estos problemas están asociados al estudio de un problema genérico de la forma

Formulación general

"Optimizar un funcional $J : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\mathcal{D}$ es la **clase de dominios admisibles** para el problema".

Nota: La clase de dominios admisibles depende de cada problema. Puede haber restricciones sobre elementos de la clase $\mathcal{D}$ como alguna regularidad, el volumen, área de la superficie, acotamiento, número de componentes conexos, convexidad, poder parametrizar etc.

Las preguntas de interés

- ¿Existe una solución al problema?
- Si la solución es única, ¿podemos caracterizar la solución?
- ¿Podemos encontrar soluciones por métodos numéricos?

Problemas como los mencionados antes forman parte de un campo fascinante de la matemática llamado **Cálculo de Variaciones**.

Perspectiva Histórica

- **(La Antigüedad.)** Problema isoperimétrico (Zenodorus, Archimedes, Pappus), principios de Fermat
- **(Siglo 17)** El desarrollo moderno tiene sus orígenes en el Cálculo de Newton y Leibniz. Famosos problemas incluyen: problema de resistencia mínima, problemas geodésicos.
- El problema de braquistócrono de los hermanos Bernoulli también estudiado por Galileo.
- Esparcimiento a la física: el famoso principio de mínima acción atribuido a Maupertuis pero que en realidad había formulado Leibniz antes que él:
"La Naturaleza minimiza el esfuerzo"
- **(Siglo 18)** Los fundadores: Euler y Lagrange.
- **(Siglo 19)** Aportes fundamentales de Weierstrass, Jacobi, Legendre.
- **(Siglo 20)** Contribuciones de Hilbert, Pontryagin.
- Piedra fundamental para mecánica clásica, mecánica cuántica y varios principios de física y problemas de ingeniería.

Problema (Curvas)

Sea $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable hasta un cierto orden en todas sus variables

$$u(t, x) := \inf \left\{ \int_0^t L(s, w(s), w'(s)) ds : w(0) = x_0, w(t) = x \right\}$$

donde el $\inf$ es con respecto a curvas C^1 que cumplen alguna restricción, por ejemplo, $\int_0^t g(s, w(s), w'(s), \dots) ds = c$.

Problema (Integrales Múltiples)

Sea $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable hasta un cierto orden en todas sus variables

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} L(x, u, Du) dx : u = g \text{ sobre } \partial\Omega \right\} .$$

Optimización Global - Existencia

Sea X un conjunto no-vacío y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Ahora considere el problema de minimización

$$\inf\{f(x) : x \in X\}.$$

¿Cuándo podemos decir que f alcanza su ínfimo?

Teorema (Teorema de Weierstrass - extendido, Ejercicio)

Si X tiene una topología Hausdorff para cual:

- ❶ X es compacto y,
- ❷ $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es semi-continua inferior, es decir, $\{x : f(x) \leq c\}$ es cerrado para cada $c \in \mathbb{R}$. En caso de un espacio topológico metrizable, se puede reemplazar la definición por: para cada sucesión x_n que converge a un x

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x),$$

entonces f alcanza su ínfimo sobre X .

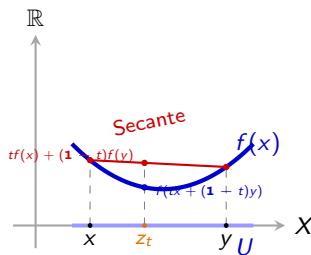
Problema a resolver

Encontrar una topología adecuada sobre X dado f , si se puede, para que se cumplan las condiciones (1) y (2) del teorema.

Definición (Función Convexa)

Sea U un subconjunto abierto de un espacio normado X y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es convexa sobre A si, para todo $x, y \in U$ y $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$



Teorema

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y tiene un mínimo local en x_0 , es decir, existe una vecindad V de x_0 tal que

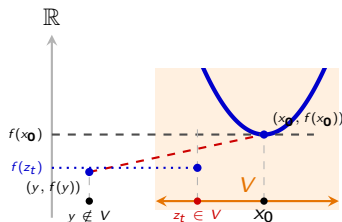
$$f(x_0) \leq f(y) \text{ para todo } y \in V$$

entonces $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in X\}$.

Demostración Suponiendo lo contrario si existiese $y \in A$ tal que $f(y) < f(x_0)$, entonces tomando $z_t = ty + (1 - t)x_0$,

$$f(z_t) \leq tf(y) + (1 - t)f(x_0) < tf(x_0) + (1 - t)f(x_0) < f(x_0)$$

y para t suficientemente pequeño z_t pertenece a V lo cual es una contradicción.



Condiciones de Mínimo Local

Condición Necesaria 1

Si A es un abierto en un e.v.n y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable con un mínimo local en un punto x_0 en A entonces

$$Df(x_0) = 0.$$

Condición Necesaria 2

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces derivable en un abierto A en un e.v.n y tiene un mínimo local en un punto x_0 en A , entonces $Df(x_0) = 0$ y $D^2f(x_0)$ es semi-definida positiva, en el sentido $D^2f(x_0)(v, v) \geq 0$ para todo $v \in X$.

Condición Suficiente

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces continuamente derivable en un abierto A en un e.v.n, $Df(x_0) = 0$ y $D^2f(x_0)$ es fuertemente definida positiva, en el sentido de que existe $\alpha > 0$ tal que

$$D^2f(x_0)(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \text{ para todo } v \in X,$$

entonces x_0 es un mínimo local.

El sentido de la derivada

Sea A un abierto en un e.v.n X .

Derivada de Gâteaux

se dice que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el sentido de Gâteaux en un punto x_0 en A si existe una $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x + tv) - f(x) - tLv\|}{t} = 0$$

para todo $v \in X$. L se llama la derivada de Gâteaux y se nota como $Df(x_0)$.

Derivada de Segundo Orden

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el sentido de Gâteaux en A se dice que f es dos veces derivable en el sentido de Gâteaux en $x_0 \in A$ si $Df(x) : X \rightarrow \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ es derivable en el sentido de Gâteaux en x_0 . Esto es, existe $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|Df(x_0 + tw)v - Df(x_0)v - tB(v, w)\|}{t} = 0.$$

B se nota por $D^2f(x_0)$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $E : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ un funcional suave.

1. Flujo Gradiente Continuo

Buscamos una trayectoria $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$ que evolucione según la dirección de máxima descenso del funcional E :

$$\begin{cases} u'(t) = -\nabla E(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

2. Discretización: Esquemas Explícito e Implícito

Dado un paso de tiempo $\tau > 0$, aproximamos $u_n \approx u(n\tau)$:

- **Euler Explícito (Forward):** $u_{n+1} = u_n - \tau \nabla E(u_n)$
Limitación: Requiere pasos τ extremadamente pequeños por estabilidad.
- **Euler Implícito (Backward / Esquema JKO):** $u_{n+1} = u_n - \tau \nabla E(u_{n+1})$
Incondicionalmente estable y extensible a espacios métricos generales mediante variacional:

$$u_{n+1} \in \arg \min_{u \in \mathcal{H}} \left\{ E(u) + \frac{1}{2\tau} \|u - u_n\|^2 \right\}$$

La resolución del paso backward motiva el operador de regularización suave del funcional E .

Definición (Proximal y Regularización de Moreau-Yosida)

Para $\lambda > 0$ y $u \in \mathcal{H}$, definimos:

- **Operador Proximal:** $\text{Prox}_{\lambda E}(u) := \arg \min_{v \in \mathcal{H}} \left\{ E(v) + \frac{1}{2\lambda} \|v - u\|^2 \right\}$
- **Envolvente de Moreau-Yosida:** $E_\lambda(u) := \inf_{v \in \mathcal{H}} \left\{ E(v) + \frac{1}{2\lambda} \|v - u\|^2 \right\}$

Propiedades Clave de E_λ

- 1 **Suavización:** Aunque E no sea diferenciable, $E_\lambda \in C^1$ y su gradiente es $\frac{1}{\lambda}$ -Lipschitz:

$$\nabla E_\lambda(u) = \frac{u - \text{Prox}_{\lambda E}(u)}{\lambda} \quad (\text{Aproximación de Yosida})$$

- 2 **Monotonía y Convergencia Puntual:** $E_\lambda(u) \leq E(u)$ y $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E_\lambda(u) = E(u)$.

Equivalencia de Problemas de Minimización

Existe una relación profunda entre los minimizadores del funcional original no suave E y los de su versión regularizada E_λ .

Teorema (Equivalencia de Puntos Críticos y Minimizadores)

Sea $E : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexo, propiamente dicho e s.c.i. Para cualquier $\lambda > 0$:

- 1 u^* es un minimizador global de E en $\mathcal{H}$ **si y solo si** u^* es un minimizador global de E_λ en $\mathcal{H}$.
- 2 Además, los valores mínimos coinciden:

$$\min_{u \in \mathcal{H}} E(u) = \min_{u \in \mathcal{H}} E_\lambda(u)$$

- 3 Se cumple que u^* es un punto fijo del operador proximal:
 $\text{Prox}_{\lambda E}(u^*) = u^*$.

Consecuencia Práctica

Un problema de optimización no diferenciable o mal condicionado $\min E(u)$ se puede substituir equivalentemente por la solución del problema suave bien condicionado $\min E_\lambda(u)$, o resolver iterativamente mediante el esquema implícito $u_{n+1} = \text{Prox}_{\tau E}(u_n)$.

El Problema y el Lagrangiano

Sean X, Y e.v.n., $A \subseteq X$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \rightarrow Y$ diferenciables. Para el problema con restricciones de igualdad $\min\{f(x) : g(x) = 0\}$, definimos el **Lagrangiano** $\mathcal{L} : A \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda(g(x))$$

Condición Necesaria de 1.º Orden (Multiplicadores de Lagrange)

Si $x_0 \in A$ es un mínimo local de f sujeto a $g(x) = 0$ y $Dg(x_0) : X \rightarrow Y$ es sobreyectivo, entonces existe un único $\lambda_0 \in Y^*$ tal que (x_0, λ_0) es un punto crítico de $\mathcal{L}$:

$$D_x \mathcal{L}(x_0, \lambda_0) = Df(x_0) + \lambda_0 \circ Dg(x_0) = 0 \quad \text{en } X^*$$

Condición Suficiente de 2.º Orden

Si (x_0, λ_0) satisface la condición de 1.º orden y el operador Hessiano $D_x^2 \mathcal{L}(x_0, \lambda_0)$ es **fuertemente definido positivo** en el núcleo de $Dg(x_0)$:

$$D_x^2 \mathcal{L}(x_0, \lambda_0)(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in \ker(Dg(x_0)), \quad \alpha > 0$$

entonces x_0 es un mínimo local estricto del problema restringido.

Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones

Para hallar un punto crítico del funcional $J(u) = \int_{\Omega} L(x, u, Du) dx$, igualamos su **derivada de Gâteaux** a cero en cualquier dirección $v \in C_c^{\infty}(\Omega)$:

1. Variación del Funcional

Consideramos la perturbación $u + tv$ con $v|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\delta J(u; v) = \left. \frac{d}{dt} J(u + tv) \right|_{t=0} = \int_{\Omega} [D_u L \cdot v + D_{\xi} L : Dv] dx = 0$$

2. Integración por Partes

$$\int_{\Omega} D_{\xi} L : Dv dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} (D_{\xi} L) \cdot v dx$$

3. Deducción: La Ecuación de Euler-Lagrange

$$\int_{\Omega} [D_u L - \operatorname{div} (D_{\xi} L)] \cdot v dx = 0 \quad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

Como v es arbitrario, obtenemos la **Ecuación de Euler-Lagrange**:

$$D_u L - \operatorname{div} (D_{\xi} L) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Euler-Lagrange y Ecuaciones de Hamilton (1D)

Para el funcional $\inf \int_0^t L(w(s), w'(s)) ds$ sobre trayectorias $w(s)$:

1. Ecuación de Euler-Lagrange

Un punto crítico $w(\cdot)$, satisface la EDO de segundo orden:

$$D_x L(x(s), x'(s)) - \frac{d}{ds} (D_q L(x(s), x'(s))) = 0 \quad \text{en } (0, t)$$

2. Transformada de Legendre y el Hamiltoniano

Introducimos el Hamiltoniano H que es función de p , el **momento conjugado**,

$$H(x, p) := p \cdot q(x, p) - L(x, q(x, p))$$

suponiendo que $p = D_q L(x, q)$ tiene una solución única $q(x, p)$ suave en (x, p) .
Entonces $D_x H(x, p) = -D_x L(x, q(x, p))$ y $D_p H(x, p) = q(x, p)$.

3. Ecuaciones Canónicas de Hamilton

El sistema de orden 2 de Euler-Lagrange equivale al sistema de orden 1 en el espacio de fases (w, p) :

$$x'(s) = D_p H(x(s), p(s)), \quad p'(s) = -D_x H(x(s), p(s))$$

Considerando la **función valor**

$$u(t, x) = \inf \left\{ \int_0^t L(s, w(s), w'(s)) ds : w(0) = x_0, w(t) = x \right\}:$$

Principio de Programación Dinámica

Para cualquier $0 < h < t$, la función valor satisface la propiedad de semigrupo:

$$u(t, x) = \inf \left\{ u(t-h, w(t-h)) + \int_{t-h}^t L(s, w(s), w'(s)) ds \right\}$$

Ecuación de Hamilton-Jacobi (EDP de 1.^{er} Orden)

Tomando el límite cuando $h \rightarrow 0^+$, la función valor $u(t, x)$ resulta ser solución (en sentido clásico o de viscosidad) de la EDP no lineal:

$$\partial_t u(t, x) + H(t, x, D_x u(t, x)) = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \mathbb{R}^n$$

con condición inicial $u(0, x_0) = 0$.

El Problema Isoperimétrico

Objetivo: Hallar una curva plana cerrada y simple de longitud fija $L > 0$ que maximice el área A encerrada por ella.

Formulación Paramétrica

Parametrizamos la curva cerrada por $t \in [0, T]$ como $x(t) = (x(t), y(t))$ con $x(0) = x(T)$. Queremos resolver:

$$\text{Maximizar } A(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^T (xy' - yx') dt$$

sujeto a la restricción de longitud fija:

$$P(x, y) = \int_0^T \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = L$$

Lagrangiano Aumentado

Introduciendo un multiplicador de Lagrange constante $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(x, y, x', y', \lambda) = \frac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

Prueba Geométrica: La Demostración de Schmidt (1939)

Consideramos una curva plana simple, cerrada y suave $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ parametrizada por longitud de arco $s \in [0, L]$, que encierra un área A .

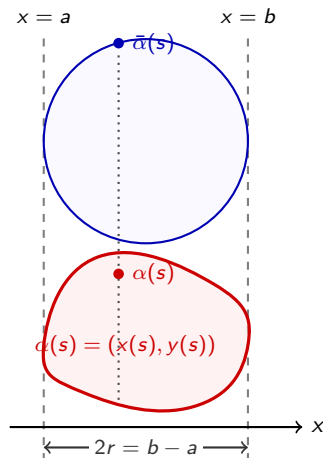


Figura: Circunferencia de referencia: $\bar{\alpha}(s) = \left(x(s), \pm \sqrt{r^2 - \left(x(s) - \frac{a+b}{2} \right)^2} \right)$

Prueba de Schmidt: Desigualdad Isoperimétrica

Sumando ambas representaciones de área obtenemos:

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)) ds$$

3. Paso Clave: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz punto a punto en el integrando:

$$xy' - \bar{y}x' \leq \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{1} = r$$

Integrando a lo largo de $s \in [0, L]$ resulta la desigualdad:

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^L r ds = Lr$$

4. Conclusión (Desigualdad MA-MG)

Usando que $2\sqrt{A \cdot \pi r^2} \leq A + \pi r^2$ (desigualdad media aritmética-geométrica):

$$2r\sqrt{\pi A} \leq Lr \implies 4\pi A \leq L^2$$

Isoperimétrico en Dimensión 2. Solución de Euler y Lagrange

Ecuaciones de Euler-Lagrange Aumentadas

Para el funcional $J(x, y) = \int_0^T \mathcal{L}(x, y, x', y') dt$, las condiciones necesarias son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) = 0$$

Integración Directa

Calculando las derivadas parciales e integrando respecto a t :

$$y' + \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) = 0 \implies y - y_0 = -\lambda \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

$$x' - \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) = 0 \implies x - x_0 = \lambda \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

Los puntos críticos son circunferencias: ¿Será un maximizador? Taller 1

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \lambda^2 \frac{(x')^2 + (y')^2}{(x')^2 + (y')^2} = \lambda^2$$

Curvatura de una curvatura crítica

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$y' - \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{v} \right) = 0, \quad -x' - \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{v} \right) = 0$$

1. Forma Vectorial

Esto se puede escribir vectorialmente como

$$(-y', x') + \lambda \frac{d}{ds} \left(\frac{x'}{v}, \frac{y'}{v} \right) \frac{ds}{dt} = 0$$

Como $T(s) = \left(\frac{x'}{v}, \frac{y'}{v} \right)$ es el vector tangente y $N(s) = \left(-\frac{y'}{v}, \frac{x'}{v} \right)$ es el normal:

$$-N(s) + \lambda \frac{dT}{ds} = 0 \implies \frac{dT(s)}{ds} = \frac{1}{\lambda} N(s)$$

2. Identificación con Frenet-Serret

Por la primera ecuación de Frenet-Serret en el plano, $\frac{dT}{ds} = \kappa(s)N(s)$. Por comparación directa:

$$\kappa(s) = \frac{1}{\lambda} = \text{constante}$$

Objetivo

Minimizar el perímetro P de una curva cerrada $r(t, \tau) = (x(t, \tau), y(t, \tau))$ manteniendo el área encerrada A_0 estrictamente constante.

Perímetro :

$$P = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Área :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

1. Gradiente del Perímetro (Fuerza de Contracción)

$$\frac{\delta P}{\delta x} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{|\dot{r}|} \right), \quad \frac{\delta P}{\delta y} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{|\dot{r}|} \right)$$

2. Gradiente del Área (Restricción de Volumen)

$$\frac{\delta A}{\delta x} = \dot{y}, \quad \frac{\delta A}{\delta y} = -\dot{x}$$

Utilizando un multiplicador de Lagrange $\lambda(\tau)$ para acoplar la minimización del perímetro con el área constante, obtenemos el sistema de evolución en el tiempo artificial τ :

Sistema Continuo de EDPs

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \right) + \lambda(\tau) \dot{y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \right) - \lambda(\tau) \dot{x}$$

- **Término de curvatura:** Deforma la curva hacia adentro para reducir el perímetro.
- **Término de Lagrange $\lambda(\tau)$:** Actúa como presión interna para fijar el área A_0 .
- **Resultado:** Relajación suave y continua hacia una circunferencia perfecta.



Oskar Bolza.

Lectures on the Calculus of Variations.

University of Chicago Press, 1904 (Dover reprint).



Stefan Hildebrandt and Anthony Tromba.

The Parsimonious Universe: Shaping and Form in the Natural World.

Springer-Verlag, 1996.



Dorin Bucur and Giuseppe Buttazzo.

Variational Methods in Shape Optimization.

Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications,
Birkhäuser, 2005.



R. Tyrrell Rockafellar.

Convex Analysis.

Princeton University Press, 1970.



Jonathan M. Borwein and Adrian S. Lewis.

Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples.

CMS Books in Mathematics, Springer, 2nd ed., 2006.

-  Jonathan M. Borwein and Qiji J. Zhu.
Techniques of Variational Analysis.
CMS Books in Mathematics, Springer, 2005.
-  Jorge Nocedal and Stephen J. Wright.
Numerical Optimization.
Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 2nd ed.,
2006.
-  Mariano Giaquinta and Stefan Hildebrandt.
Calculus of Variations I and II.
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 1996.
-  Stanley Osher and Ronald Fedkiw.
Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces.
Applied Mathematical Sciences, Vol. 153, Springer-Verlag, New York,
2003.
-  Stanley Osher and Nikos Paragios (Eds.).
Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics.
Springer-Verlag, New York, 2003.